Die Wirkungsfunktion

$$S = \int L(x, \dot{x}, t)\, dt \qquad \text{mit} \qquad L = T - V$$

ist zu gegebenem E und V bekannt und erfüllt die **Hamilton-Jacobi-Gleichung** (partielle Ableitungen als Index geschrieben):

$$S_t = -\frac{1}{2m} S_x^2 - V$$

Für konservative Systeme gilt:

$$S = \int p\, dx - E\, t \quad \text{bzw.} \quad S_t = -E \qquad \text{und} \qquad S_x = p \quad \text{(immer)}$$

Die Wellenfunktion

$$\Psi = A e^{iS/\hbar}$$

kann immer auf obige Form gebracht werden (Superposition). Für $E = const$ gilt:

$$\Psi = A e^{i(\int p\, dx - Et)/\hbar}$$

Welche Bewegungsgleichung wird von Ψ erfüllt ?

1. "Geometrische Optik": $A \approx const$, $S_x = p \approx const$ in $x \gg \lambda$

$$\Psi_x = \frac{i}{\hbar} p \Psi \qquad ; \qquad p \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

vgl. Schwingungsgleichung in $\mathbb{C}$ (in reduzierter Ordnung)

$$\boxed{\Psi_{xx} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi} \qquad \text{'stationäre SGl'} \quad \text{mit } p^2 = 2m(E - V) \qquad (1)$$

$$\Psi_t = -\frac{i}{\hbar} E \Psi \qquad ; \qquad E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$i\hbar \Psi_t = E\Psi = \frac{p^2}{2m} \Psi + V\Psi$$

$$\boxed{i\hbar \Psi_t = \frac{-\hbar^2}{2m} \Psi_{xx} + V\Psi} \qquad \text{SGl - vorläufig nur 'strahlenoptisch'} \qquad (2)$$

Man vergleiche mit

$S_t = -\frac{1}{2m} S_x^2 - V \quad ; \quad S = -i\hbar \ln \frac{\Psi}{A}$ (Schrödinger, 1. Mitteilung mit reellem Ansatz) oder $E = \frac{p^2}{2m} + V$ (und Operatoren)

2. Verallgemeinerung: $A = A(x,t)$ und $S = S(x,t)$ beliebig, also

$$\Psi = A(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}$$

$$\Psi_x = (A_x + \tfrac{i}{\hbar}S_x A)e^{iS/\hbar} \quad ; \quad \Psi_t = (A_t + \tfrac{i}{\hbar}S_t A)e^{iS/\hbar}$$

$$\Psi_{xx} = \left[\underbrace{A_{xx} - \frac{S_x^2}{\hbar^2}A}_{\Re} \quad + \quad i\underbrace{\frac{1}{\hbar}(S_{xx}A + 2S_xA_x)}_{\Im}\right] e^{iS/\hbar} \qquad \to A_{xx} + i\Im = 0$$

als Gleichung zur Bestimmung von A

Kontinuitätsgleichung[1]:

$$A_t = -\frac{1}{2m}(S_{xx}A + 2S_xA_x) = -\frac{\hbar}{2m}\Im$$

also

$$\Psi_{xx} = \left(A_{xx} - \tfrac{S_x^2}{\hbar^2}A - i\tfrac{2m}{\hbar}A_t\right) e^{iS/\hbar}$$

Hamilton-Jacobi - mit einer 'passenden Ergänzung' Q:

$$\begin{aligned} S_t &= -\frac{1}{2m}S_x^2 - V + Q \qquad \sim \Re + const \\ \frac{2mA}{\hbar^2}S_t &= -\frac{S_x^2}{\hbar^2}A + \frac{2mA}{\hbar^2}(Q - V) \qquad ; \qquad Q := \frac{\hbar^2}{2mA}A_{xx} \end{aligned}$$

also

$$\Psi_{xx} = \left(\tfrac{2mA}{\hbar^2}(S_t + V) - i\tfrac{2m}{\hbar}A_t\right) e^{iS/\hbar}$$

und schließlich mit $\Psi_t = (A_t + \frac{i}{\hbar}S_tA)e^{iS/\hbar}$

$$\begin{aligned} -i\frac{2m}{\hbar}\Psi_t &= \left(-i\frac{2m}{\hbar}A_t + \frac{2m}{\hbar^2}S_tA\right) e^{iS/\hbar} \\ -i\frac{2m}{\hbar}\Psi_t &= \Psi_{xx} - \frac{2m}{\hbar^2}V\Psi \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{i\hbar\Psi_t = \frac{-\hbar^2}{2m}\Psi_{xx} + V\Psi} \qquad (3)$$

[1] $\rho_t = -1/m(\rho_x p + \rho p_x) \left\{ \begin{array}{l} p = S_x \\ \rho = A^2 \;:\; 2AA_t = -1/m(2AA_xp + A^2p_x) \end{array} \right.$

Inhalt